Ogólna teoria całki
Lista 3

Definicja. Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą i niech $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi. Powiemy, że ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do f *prawie jednostajnie* względem miary μ, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{F\in\Sigma}\ \ \mu(F) < \varepsilon\ \wedge\ \text{ ciąg } \{f_n|_F\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ jest jednostajnie zbieżny do } f|_F.$$

Zad 1. Sprawdzić, które z ciągów z Zadania 2 z Listy 2 są prawie jednostajnie zbieżne.

Zad 2. Niech $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do f prawie jednostajnie. Pokazać, że $f_n \xrightarrow{\mu} f$ oraz $f_n \xrightarrow{p.w.} f$.

Zad 3. Znaleźć przykłady ciągów zbieżnego według miary oraz zbieżnego prawie wszędzie, niezbieżnych prawie jednostajnie.

Zad 4. (Twierdzenie Jegorowa) Niech μ będzie miarą skończoną. Pokazać, że ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do f prawie jednostajnie (względem μ) wtedy i tylko wtedy, gdy $f_n \xrightarrow{p.w.} f$.

Zad 5. Pokazać, że funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ całkowalna względem miary liczącej wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ jest bezwzględnie zbieżny.

Zad 6. Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą i niech $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie funkcją mierzalną. Pokazać, że

a) jeśli $f \le 0$ i $\int_X f\, d\mu = 0$, to $f = 0$ prawie wszędzie;

b) jeśli $\int_A f\, d\mu = 0$ dla każdego $A \in \Sigma$, to $f = 0$ prawie wszędzie;

c) jeśli f jest funkcją całkowalną, to $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ jest zbiorem miary zero;

d) jeśli f jest funkcją całkowalną, to

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \mu(\{x \in X : |f(x)| \ge n\}) = 0.$$

Zad 7. Obliczyć całkę Lebesgue'a z następujących funkcji, po danych przedziałach:[1]

	funkcja	przedział		funkcja	przedział
a)	$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathcal{C} \\ 2, & x \notin \mathcal{C} \end{cases}$	[0,1]	d)	$f(x) = \frac{1}{[x]!}$	$[0, +\infty)$
b)	$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q} \\ \cos x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$	$(0, \frac{\pi}{2}]$	e)	$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathcal{C} \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & x \in (\alpha, \beta) \end{cases}$	$[0, 1]$
c)	$f(x) = e^{-[x]}$	$[0, +\infty)$	f)	$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \frac{\pi}{x})$	$[0, 1]$

Zad 8. Obliczyć całkę $\int_A f(x)\, d\mu(x)$, gdy

	A	$f(x)$	μ		A	$f(x)$	μ
a)	$(0, 10]$	x^2	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\delta_k$	d)	$\mathbb{R}$	$\cos(\pi x)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1/2)^k}{k}\delta_k$
b)	$\mathbb{R}_+$	$\exp(x)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\delta_k$	e)	$[0, \frac{\pi}{2})$	$\sin(x)$	$m + \delta_0$
c)	$\mathbb{R}_+$	$(\frac{1}{2})^x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^k\delta_k$	f)	$\mathbb{R}$	$\lvert x\rvert \exp(-\lvert x\rvert)$	$m + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}\delta_k$

gdzie m oznacza miarę Lebesgue'a.

[1] w podpunkcie e) przedział (α, β) jest jednym z przedziałów usuniętych przy konstrukcji zbioru $\mathcal{C}$.